数理解析研究所講究録
280巻 1976年 65-84

等質空間に対する淡中型双対定理

京大 理　　辰馬伸彦

局所コンパクト群に対する淡中型双対定理の拡張として，岩堀-杉浦両氏は[2]に於いて，等質空間の"表現"を定義し，等質空間とその表現の空間の間の双対性の概念を定め，コンパクトLie群の等質空間について，その双対性の成立する事を証明して居る。

本文では，一般の局所コンパクト群の等質空間に対して，同じ型の双対性を考える。群の場合淡中型双対定理が常に成立したのに反し，等質空間のそれは，空間にある条件がある時にのみ成立する。成立する為の必要十分條件はまだ求まって居ないが，本文では，成立の為のいくつかの必要條件と，十分條件を与える。それらの條件の1つ，"等質空間の点を分離する不変ベクトルの族がある"，はたとえばLie群の等質空間について，双対定理が成立する為の必要十分條件を与えるものである。

又これらの條件は，コンパクト群の等質空間とか，群自身を等質空間とみなす場合は必然的に満されるもので，その意味から，此の結果は從來得られて居る所の淡中型双対定理の拡張であるとも云える．

§1．等質空間の表現．　Gを局所コンパクト群，Hをその閉部分群とし，X（$=H\backslash G$）でその等質空間を表わす。Gから X の上への canonical map による G の元 g の像を $\hat{g}$ と書く。g は X の上に，$X \ni x \longrightarrow x\cdot g \in X$ により作用して居る。Gの単位元を e とする。

定義1．　Xの表現 $\{\omega, \varphi\}$（φ と略記）とは，Gのユニタリ表現 $\omega = \{\mathfrak{H}^{\omega}, T_g^{\omega}\}$ と，X から ω の表現空間 $\mathfrak{H}^{\omega}$ への写像 $\varphi: x \longrightarrow \varphi(x)$ の組で，表現作用素 T_g^{ω} について，

（1）　$$\varphi(x\cdot g) = T_{g^{-1}}^{\omega}(\varphi(x)),$$

を満すものを云う。

Xの表現 φ が与えられた時，$\forall h \in H$ に対して，（1）より

$$T_h^{\omega}(\varphi(\hat{e})) = \varphi(\hat{e}\cdot h^{-1}) = \varphi(\hat{e})$$

であるから，$\varphi(\hat{e})$ は H-不変ベクトルである．

逆に，$\mathfrak{H}^{\omega}$ 中に H-不変ベクトル v が与えられた時に，$\varphi(\hat{g}) \equiv T_{g^{-1}}^{\omega} v$，によって φ を定義すると，$\{\omega, \varphi\}$ の組は定義1．の X の表現となる．すなわち，X の表現を与える事は，Gのユニタリ表現 $\omega = \{\mathfrak{H}^{\omega}, T_g^{\omega}\}$ と，$\mathfrak{H}^{\omega}$ 中の H-不変ベクト

ルVの組を与える事に他ならない。此の意味から，以下Xの表現は，$\varphi \equiv (\omega, v)$ と云つた形に表示し，考えるのに便利な方を用いる事とする。更に，次の記号を用いる。

$\mathcal{R}\ (\equiv \mathcal{R}(X)) \equiv$ （Xの表現 φ の全体の集合）.

$$\mathfrak{H}_0^{\omega} \equiv \{ v \in \mathfrak{H}^{\omega} \mid T_h^{\omega} v = v, \ \forall h \in H \}.$$

<u>定義2.</u>　$\varphi_j \equiv (\omega_j, v_j) \in \mathcal{R}$　$(j=1,2)$ に対し，

1)　$\varphi_1 \xrightarrow[U]{} \varphi_2$，とは，$\mathfrak{H}^{\omega_1}$ から $\mathfrak{H}^{\omega_2}$ の上へのユニタリ写像 U によつて，G の表現 ω_1 と ω_2 が同値であり，しかも，

$U v_1 = v_2$，　となる事を云う。

2)　$\varphi_1 \oplus \varphi_2 \equiv (\omega_1 \oplus \omega_2, v_1 \oplus v_2)$.（直和）

3)　$\varphi_1 \otimes \varphi_2 \equiv (\omega_1 \otimes \omega_2, v_1 \otimes v_2)$.（テンソル積）

こゝで，右辺の $\oplus$，$\otimes$ は夫々 G の表現としての直和及びテンソル積を示す。　┘

定義2より直ちに次の補題3が得られる。

<u>補題3.</u>　$\forall x \in X$，　$\forall \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{R}$　に対して，

1)　$\varphi_1 \xrightarrow[U]{} \varphi_2 \implies U(\varphi_1(x)) = \varphi_2(x)$,

2)　$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) \oplus \varphi_2(x)$，

3)　$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) \otimes \varphi_2(x)$，

4)　$\| \varphi(x) \| = \| \varphi(e) \|$.　┘

<u>定義4.</u>　$\mathcal{R}$ の表現 u とは，$\mathcal{R}$ の各元 $\varphi \equiv (\omega, v)$ で夫々 $\mathfrak{H}^{\omega}$ に値 $u(\varphi)$ をとる $\mathcal{R}$ 上のベクトル値函数であつて，

1) $\varphi_1 \xrightarrow[\Pi]{} \varphi_2 \implies \Pi(u(\varphi_1)) = u(\varphi_2)$,

2) $u(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = u(\varphi_1) \oplus u(\varphi_2)$,

3) $u(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = u(\varphi_1) \otimes u(\varphi_2)$,

4) $\exists M < \infty$ s.t. $\|u(\varphi)\| \leqq M \|\varphi(e)\|$, $\forall \varphi \in \mathcal{R}$,

が $\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi \in \mathcal{R}$ について成立するものを云う。 ┘

補題3から, $\forall x \in X$ に対して, $\mathcal{R} \ni \varphi \longrightarrow \varphi(x) \in \mathfrak{G}^{\omega}$ とする $\mathcal{R}$ 上のベクトル値函数が, 定義4で与えた $\mathcal{R}$ の表現となって居る事は明らかであるが, 逆に次の命題を考えよう。

<u>命題 [岩堀-杉浦の双対定理]</u> $\mathcal{R}$ の任意の表現 u に対して, X の元 x が一意的に定まって,

$$u(\varphi) = \varphi(x) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{R}.$$ ┘

以下簡単の為に此の命題を ((G, H) に対する) I.S-duality と呼ぶ。本文で我々の取上げるのは, 次の問題である。

<u>問題</u> どの様な, G とその閉部分群 H の pair に対して, I.S-duality が成立するか? ┘

以下に, 此の問題に対する既知の結果を, 二, 三, 例示する。

<u>例5.</u> [2] では, G がコンパクト Lie 群の時, 任意の H で, I.S-duality の成立する事を示している。 ┘

<u>例6.</u> H が正規部分群の時, (G, H) に対する I.S-duality は, 商群 $H \backslash G$ に対する淡中型双対定理に他ならない。

<u>例7.</u> G を $SL(2, \mathbb{C})$, H を上三角行列より成る G の

閉部分群とする。この時，Gの既約ユニタリ表現は，Hに制限しても，Hの表現として又既約である。すなわち，H-不変ベクトルをもつGの既約ユニタリ表現は，trivial表現のみであり，従ってH-不変ベクトルは又G-不変で，Hを分離出来ない。つまり $\mathcal{R}(X)$ の元はtrivialなものしかなく，明らかに此の場合は，I.S-dualityは成立しない。 $\lrcorner$

§2. 主結果. Gのユニタリ表現ωの表現空間 $\mathfrak{H}^{\omega}$ のベクトルvに対して，Gの閉部分群 H_v を次の様に定める。

$$H_v \equiv \{ g \in G \mid T_g^{\omega} v = v \}$$

Hのtrivial表現 1_H を，Gに誘導した表現を $\sigma \equiv \mathrm{Ind}_{H \uparrow G} 1_H$ で示す。$\mathfrak{H}_0^{\sigma}$ の元はX上の函数として実現されるが，canonical mapの逆像で，G上の函数と見る時，GのH-double cosets上で同じ値をとる函数，即ち $H \backslash G / H$ 上の函数と考えられる。

X上の擬不変測度での測度0は，G上での逆像が不変測度で測度0である事と同値である。更にG上の不変測度では，dg と dg^{-1} は互に絶対連続である。従って，$\forall f \in \mathfrak{H}_0^{\sigma}$ に対し，

$f^*(\tilde{g}) \equiv \overline{f(\widetilde{g^{-1}})}$ によって，X上のH-不変可測函数 f^* を定義する事が出来る。同様X中のH-不変可測集合Eに対して，$E^{-1} \equiv \{ \tilde{g} \mid \widetilde{g^{-1}} \in E \}$ と定義すれば，又H-不変可測である。特に $E = E^{-1}$ の時，Eを対称であると云う。

以下，pair (G, H) に対する幾つかの條件をあげる。

(P-1) $$H = \bigcap_{v \in \mathfrak{S}_0^{\omega},\ \omega \in \Omega} H_v .$$

(Ω は G のユニタリ表現の全体を示す。)

(P-2) H-不変な近傍からなる基本近傍系を持つ $x \in X$ がある。

(P-3) $$H = \bigcap_{f \in \mathfrak{S}_0^{\sigma}} H_f .$$

更に別に，補助的条件として，

(A-1) X 中に H-不変な相対コンパクト開集合がある。

(A-1') X 中に H-不変な(対称)正有限測度の可測集合がある。

(A-2) X は局所連結.

(A-3) H 中に G の正規閉部分群 N がとれて，$N \backslash H$ があるコンパクト集合により生成される。

条件 (A-1), (A-2), (A-3) の内の何れか1つが成立する事を (A) で示す。

本文での主結果は次の通りである。

<u>主定理</u>

$$\text{(P-1)} + \text{(A)} \Longrightarrow \text{(P-2)} \Longrightarrow \text{(I.S-duality)} \Longrightarrow \text{(P-1)}$$
$$\text{(P-2)} \Longrightarrow \text{(P-3)}$$
$$\text{(P-1)} + \text{(A-1')} \Longrightarrow \text{(P-3)} \Longrightarrow \text{(P-1)}$$

矢印は，その左の命題が仮定されれば，その先の命題が結論される事を示す。

特に，証明の途中で出て来る次の補題は，I.S-duality が成立する為の必要条件の1つとして，特徴的である。

<u>補題9.</u> pair (G,H) が $(P\text{-}1)$ を満すなら, $X\equiv H\backslash G$ 上に G-不変測度がある.

証明は後の方で示す.

<u>§3. 証明の準備.</u>

証明に用いる補題を準備する.

<u>補題10.</u> Gのユニタリ表現ωを1つ固定し, $v_1, v_2\in\mathfrak{H}^{\omega}_0$ に対し, $\varphi_j\equiv(\omega, v_j)$, $(j=1,2)$, $\varphi_0\equiv(\omega, av_1+bv_2)$, $a,b\in\mathbb{C}$ で与えられるXの表現 φ_1, φ_2, φ_0 を考える.

この時, $\mathcal{R}$の任意の表現 u について,

$$u(\varphi_0) = a\,u(\varphi_1) + b\,u(\varphi_2).$$

<u>証明.</u> $a\neq 0$ としてよい. $\mathfrak{H}^{\omega\oplus\omega}\equiv\mathfrak{H}^{\omega}\oplus\mathfrak{H}^{\omega}$ の中で, $V_1\equiv\{v\oplus(\bar b/\bar a)v \mid v\in\mathfrak{H}^{\omega}\}$, $V_2\equiv\{(b/a)v\oplus(-v) \mid v\in\mathfrak{H}^{\omega}\}$, と置くと, $\mathfrak{H}^{\omega\oplus\omega}=V_1\oplus V_2$ は, $\omega\oplus\omega$ の直和分解であり, ベクトル $w_1\oplus w_2$ の V_1, V_2 への分解成分は夫々,

$$\bar a(aw_1+bw_2)(|a|^2+|b|^2)^{-1},\quad a(\bar b w_1-\bar a w_2)(|a|^2+|b|^2)^{-1}$$

である. $v_1\oplus v_2$ に適用し, 定義4. 1), 2) より結果を得る.

<u>補題11.</u> $\mathcal{R}$の表現uが, $\varphi\equiv(\omega, v)\in\mathcal{R}$ でとる値は, $\{T_g^{\omega}v \mid g\in G\}$ ではられる $\mathfrak{H}^{\omega}$ の閉部分空間内に入る.

<u>証明</u> 問題の閉部分空間へのωの制限をω_1とし, $\omega=\omega_1\oplus\omega_2$ と直和分解する. $\varphi_1\equiv(\omega_1, v)$, $\varphi_2\equiv(\omega_2, 0)$ とおくと, $\varphi=\varphi_1\oplus\varphi_2$ であるから, 表現uの定義より, $u(\varphi)=u(\varphi_1)\in\mathfrak{H}^{\omega_1}$

<u>補題12.</u> 定義4 4) のMは, $M=1$ としてよい.

<u>証明</u> ある $\varepsilon>0$ と，$\varphi\in\mathcal{R}$ に対し，$\|\mathcal{U}(\varphi)\|>(1+\varepsilon)\|\varphi(\hat{e})\|$ とすれば，定義4 3) により，$\mathcal{U}(\overset{m}{\pi}\otimes\varphi)=\overset{m}{\pi}\otimes(\mathcal{U}(\varphi))$ となり，

$$\|\mathcal{U}(\overset{m}{\pi}\otimes\varphi)\|=\|\mathcal{U}(\varphi)\|^m>(1+\varepsilon)^m\|\varphi(\hat{e})\|^m=(1+\varepsilon)^m\|\overset{m}{\pi}\otimes\varphi(\hat{e})\|$$

これは，共通の $M<+\infty$ で，定義4 4)の成立する事に反す。」

補題10, 11, 12 により，$\mathcal{R}$ の表現 $\mathcal{U}$ が与えられた時，各 ω に対して，$\mathfrak{G}_0^\omega$ から $\mathfrak{G}^\omega$ への有界線型作用素 T^ω が定義され，$\varphi\equiv(\omega,v)\in\mathcal{R}$ で $\mathcal{U}(\varphi)=T^\omega v$ となる事が判った。

<u>補題13.</u> X上の閉部分集合の族 $\mathfrak{F}\equiv\{F_\alpha\}$ が $\bigcap_\alpha F_\alpha=\{\hat{e}\}$ を満すとする。この時，X の任意のコンパクト部分集合 C と，$\hat{e}$ の任意の近傍 V に対し，$\mathfrak{F}$ の有限部分集合 $\{F_j\}$ をとり，

$$C\cap\left(\bigcap_j F_j\right)\subset V$$ とする事が出来る。」

<u>証明.</u> V を開集合としてよい。$C-V$ はコンパクトであり，$\bigcup_\alpha(F_\alpha)^c$ はその開被覆であるから，有限被覆 $\bigcup_j(F_j)^c\supset C-V$ をとる事が出来，その被覆に対し，$C\cap(\bigcap_j F_j)\subset V$ となる。」

<u>補題14.</u> pair (G,H) が (P-1) を満すとする。この時，H の任意のコンパクト部分集合 K と，$\hat{e}$ の X 中の任意の近傍 V に対し，V に入る $\hat{e}$ の X 中の近傍 W がとれて，$WK\subset W$.」

<u>証明.</u> 各 $v\in\mathfrak{G}_0^\omega$ と $\varepsilon>0$ に対して，

$$E_{\varepsilon,v}\equiv\{g\in G\mid |\langle v,v\rangle-\langle T_g^\omega v,v\rangle|\leqq\varepsilon\},$$

とおくと，明らかに $HE_{\varepsilon,v}H=E_{\varepsilon,v}$ であり，$F_{\varepsilon,v}\equiv\widehat{E_{\varepsilon,v}}$ は X 中の $\hat{e}$ の H-不変閉近傍である。更に (P-1) の仮定より，$H=\bigcap_{\varepsilon,v,\omega}E_{\varepsilon,v}$

であるから $\{\tilde{e}\} = \bigcap_{\varepsilon, v, \omega} F_{\varepsilon, v}$. $\mathcal{F} \equiv \{F_{\varepsilon, v}\}$ と，Vに入る$\tilde{e}$のコンパクト近傍V_0について，$C \equiv \bar{V}_0 \cdot K$ とおいて，これに補題13 を適用すると，有限ケの$\{F_{\varepsilon_j, v_j}\}$があって，

$W \equiv V_0 K \cap (\bigcap_j F_{\varepsilon_j, v_j}) \subset V_0$ となる．所で Wの定義により，

$WK \subset V_0 K$, 及び，$WK \subset WH \subset (\bigcap_j F_{\varepsilon_j, v_j})H \subset \bigcap_j (F_{\varepsilon_j, v_j} H) = \bigcap_j F_{\varepsilon_j, v_j}$

であるから，$WK \subset V_0 K \cap (\bigcap_j F_{\varepsilon_j, v_j}) \subset W$ となる．」

(補題9の証明) [4] p44. により，X上にG不変測度が存在する事と，G, H夫々のmodular函数のH上での比，$\Delta_G(h)/\Delta_H(h) = 1$ ($\forall h \in H$) である事は同値である．従って，X上にG不変測度が存在せぬと仮定すれば，$\exists h_0 \in H$ で，$\Delta_G(h_0)/\Delta_H(h_0) > 8$ となる．さて，X上の擬不変測度μは，G上の連続函数ψにより，$(d\mu(\tilde{g} g_1)/d\mu(\tilde{g})) = \psi(g g_1)/\psi(g)$ になる様にとれる．([1] §2 Th.2)

Gの中のeの近傍を，$\forall g \in W$ で $(\psi(e)/2) < \psi(g) < 2\psi(e)$ となる様にとり，V_0 を $V_0 \cup h_0^{-1} V_0 h_0 \subset W$ととる．$\{e, h_0, h_0^{-1}\}$ を補題14 のKと思い，$\tilde{V}_0$をVと思えば，適当な$\tilde{e}$の近傍W_1が$\tilde{V}_0$の中にとれて，$W_1 h_0 = W_2$. 特に W_2 のGの中での逆像は HV_0 に入る。一方，

$$0 < \mu(W_1 h_0^{-1}) = \int_{W_2} d\mu(\tilde{g} h_0) = \int_{W_1} (\psi(g h_0)/\psi(g))\, d\mu(\tilde{g}).$$

こゝで $\tilde{g} \in W_1$ の代表元 g を HV_0 から取ったと思えば，

$$(\psi(g h_0)/\psi(g)) = (\psi(u h_0)/\psi(u)) = (\psi(h_0 h_0^{-1} u h_0)/\psi(u)) = (\Delta_G(h_0)/\Delta_H(h_0))\,\psi(h_0^{-1} u h_0)/\psi(u))$$

$\geq 8\left(\left(\gamma(e)/2\right)/2\gamma(e)\right) > 2$　（但し $g \in HU$, $u \in V_0$）

従って上式に代入すると，　$\mu(W_1 h_0^{-1}) > 2\int_{W_1} d\mu(\tilde{g}) = 2\mu(W_1) > 0$.

此れは　$W_1 h_0 = W_1$　に反する．

補題 15.　G のユニタリ表現 ω に対して，$\mathfrak{H}_0^\omega$ の正規直交基 $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ を１つ固定する．$\mathfrak{H}^\omega \otimes \mathfrak{H}^\sigma$ から $\Sigma\oplus\mathfrak{H}^\sigma$ への写像，

$$B_\omega \ ; \quad v \otimes f \longmapsto \{\langle T_g^\omega v, \varphi_\alpha \rangle f(\tilde{g})\}_\alpha$$

は $\omega \otimes \sigma$ から $\Sigma\oplus\sigma$ の中への intertwining operator を与える。

特に，$\omega = \sigma$ の場合の対応は次で与えられる．

$$B \ ; \quad f_1(\tilde{g}_1) f_2(\tilde{g}_2) \longmapsto \{\langle T_g^\sigma f_1, \varphi_\alpha \rangle f_2(\tilde{g})\}_\alpha$$

証明．有界性は上の形から，又 $\mathfrak{H}^\omega \otimes \mathfrak{H}^\sigma \ni T_{g_0}^\omega v \otimes T_{g_0}^\sigma f$ は，B_ω により，$\{\langle T_{gg_0}^\omega v, \varphi_\alpha \rangle f(\tilde{g}\tilde{g}_0)(d\mu(\tilde{g}g_0)/d\mu(\tilde{g}))^{1/2}\}$ に写される事より，作用素の対応は明らかである．

補題 16.　補題 12 の後の注意により，R の表現 u に対して与えられた $\mathfrak{H}_0^\sigma$ から $\mathfrak{H}^\sigma$ への有界線型作用素を Π^σ とする．この時，$\forall f_1, f_2, f_3 \in \mathfrak{H}_0^\sigma$ について，

(*)　$\langle T_g^\sigma(\Pi^\sigma f_1), f_2 \rangle (\Pi^\sigma f_3)(\tilde{g}) = (\Pi^\sigma(\langle T_\cdot^\sigma f_1, f_2 \rangle f_3))(\tilde{g})$, a.e. $\tilde{g}$.

証明．補題 15 の同値対応 B を，表現 u の定義に適用する．

$$B(\Pi^\sigma f_1 \otimes \Pi^\sigma f_3) = \{\langle T_g^\sigma \Pi^\sigma f_1, \varphi_\alpha \rangle \Pi_0^\sigma f_3\}_\alpha$$

$$(\Sigma\oplus\Pi^\sigma) B(f_1 \otimes f_3) = \{\Pi^\sigma(\langle T_\cdot^\sigma f_1, \varphi_\alpha \rangle f_3)\}_\alpha$$

B が intertwining operator であるから，左辺が等しく，従って右辺の各成分が等しいが，$\{\varphi_\alpha\}$ は任意にとれるから (*) を得る．

補題17. μ を X 上の G-不変測度とする。f_1, f_2 を H-不変な $L^1_\mu(X)$ の元，k を H-不変な $L^2_\mu(X)$ の元とすれば，

$\langle T_g^\sigma f_1, f_2\rangle \equiv \int_X f_1(xg)f_2(x)\,dx$, $\langle T_g^\sigma k, f_2\rangle \equiv \int_X k(xg)f_2(x)\,dx$,

$\langle T_g^\sigma f_2, k\rangle \equiv \int_X f_2(xg)k(x)\,dx$ は X 上の函数として定義され，

i) $f_2^*\in L^1_\mu(X)$ なら $\|\langle T_g^\sigma f_1, f_2\rangle\|_1 \leqq \|f_1\|_1\cdot\|f_2^*\|_1$

ii) $f_2^*\in L^1_\mu(X)$ なら $\|\langle T_g^\sigma k, f_2\rangle\|_2 \leqq \|k\|_2\cdot\|f_2\|_1^{1/2}\cdot\|f_2^*\|_1^{1/2}$

iii) $k^*\in L^2_\mu(X)$ なら $\|\langle T_g^\sigma f_2, k\rangle\|_2 \leqq \|f_2\|_1\|k^*\|_2$

(但しノルムは全て，X 上の μ による L^1, L^2 等のノルム) ┘

証明. 全て同様の計算で示されるので，一番複雑な ii) の式を示す。$\langle T_g^\sigma k, f_2\rangle$ が X 上の函数になる事は，μ の G-不変性と，f_2 の H-不変性から明らかである。さて $\forall h\in L^2_\mu(X)$ に対し，

$$\left|\int_X \langle T_g^\sigma k, f_2\rangle\overline{h(\tilde g)}\,d\mu(\tilde g)\right| = \left|\int_X\left(\int_X k(xg)f_2(x)\,d\mu(x)\right)\overline{h(\tilde g)}\,d\mu(\tilde g)\right|$$

$$\leqq \int_X\left(\int_X |k(x)f_2(xg^{-1})|\,d\mu(x)\right)|h(\tilde g)|\,d\mu(\tilde g) = \int_X\int_X |h(\tilde g)f_2^*(gx^{-1})k(x)|\,d\mu(x)\,d\mu(\tilde g)$$

$$\leqq \int_X\left(\int_X |h(\tilde g)|^2|f_2^*(gx^{-1})|\,d\mu(\tilde g)\cdot\int_X|f_2^*(gx^{-1})|\,d\mu(\tilde g)\right)^{1/2}|k(x)|\,d\mu(x)$$

$$= \|f_2^*\|_1^{1/2}\left(\int_X\int_X|h(\tilde g)|^2|f_2(xg^{-1})|\,d\mu(\tilde g)\,d\mu(x)\right)^{1/2}\left(\int_X|k(x)|^2\,d\mu(x)\right)^{1/2}$$

$$= \|f_2^*\|_1^{1/2}\,\|k\|_2\left(\int_X|h(\tilde g)|^2\left(\int_X|f_2(xg^{-1})|\,d\mu(x)\right)d\mu(\tilde g)\right)^{1/2}$$

$$= \|f_2\|_1^{1/2}\|f_2^*\|_1^{1/2}\|k\|_2\|h\|_2$$

h の任意性から ii) 式が得られる。 ┘

§4. 主定理の証明 (1).

先ず次の事に注意する。

X 上の H-不変集合 $\tilde E$ は canonical map による G での逆像をとると，ある G 上の集合 E によって HEH の形に書ける。

従って，２つのH-不変集合$\hat{E}_1, \hat{E}_2$に対して，夫々の逆像をHE_1, HE_2とすると，$(HE_1)\cdot(HE_2) = H(E_1\cdot E_2)$は，$E_1, E_2$の選び方によらない．その$X$への像を$\hat{E}_1\cdot\hat{E}_2$と書く事にする．[4] p19 により，$\hat{E}_1, \hat{E}_2$がコンパクトなら$E_1, E_2$も又コンパクトにとれる．従って$\hat{E}_1\cdot\hat{E}_2$及び$\hat{E}_1^{-1}$（§2参照）もコンパクトである．又補題17 i）より，$\hat{E}_1, \hat{E}_2$が有限測度を持てば$\hat{E}_1\cdot\hat{E}_2$も又有限測度を持つ．此の事から，條件(P-2)でのxは，そのH-不変コンパクト近傍系$\{\hat{V}\}$の代りに，$\{\hat{V}^{-1}\hat{V}\}$を考えれば，$x=\hat{e}$であったとしてよい事が判る．扨て，

(P-3) $\longrightarrow$ (P-1) は明らか． ┘

(I.S-duality) $\longrightarrow$ (P-1)．今 $H \subsetneqq \bigcap_{v\in\mathfrak{G}_0^\omega,\ \omega\in\Omega} H_v$ とする。即ち，$g\in\bigcap_{v\in\mathfrak{G}_0^\omega,\ \omega} H_v$ 且 $g\notin H$ をとると，$\forall\varphi\equiv(\omega,v)\in\mathcal{R}$で，

$\varphi(\hat{g}) = T_g^\omega(\varphi(\hat{e})) = T_g^\omega v = v = \varphi(\hat{e})$。一方 $g\notin H$ より，$\hat{g}\neq\hat{e}$。此れは I.S-duality の一意性に反す。 ┘

(P-2) $\longrightarrow$ (P-3)．先ず補題9の証明は，(P-2)を仮定すれば，補題14を径ずにW_1の存在が云え，従ってX上のG-不変測度の存在が云える事に注意する．$\hat{e}$のH-不変コンパクト近傍系$\{\hat{W}\}$の特性函数$\{\chi_{\hat{W}}\}$の族は$\mathfrak{G}_0^0$に入る．(P-2)の仮定より，$\{\hat{W}\}$は近傍系の基となるから，$\forall g\notin H$に対し，gを含まない$\hat{W}$をとれば，$\chi_{\hat{W}}\neq T_g^0\chi_{\hat{W}}$，即ち$H_{\chi_{\hat{W}}}\not\ni g$であって，(P-3)が結論される． ┘

$(P-1)+(A-1) \longrightarrow (P-2)$。補題14同様 $^{\forall}v \in \mathfrak{g}_0^{\omega}$ と $\varepsilon>0$ で，

$$E^0_{\varepsilon, v} \equiv \{ g \in G \mid |\langle v, v\rangle - \langle T_g^{\omega} v, v\rangle| < \varepsilon \}$$

を考えると，これは H-不変開集合であって，(P-1)の仮定より

$$H = \bigcap_{v, \omega, \varepsilon} E^0_{\varepsilon, v} \quad \text{である.}$$

(A-1)で仮定する H-不変相対コンパクト開集合を C とすると，$C^{-1}\cdot C$ は又相対コンパクトで，$\hat{e}$ の H-不変近傍を与える。補題13.を使用すれば，$\{C^{-1}C \cap (\bigcap_j^N E^0_{\varepsilon_j, v_j})\}$ が(P-2)の基本近傍系である事が直ちに判る。 ┘

$(P-1)+(A-2) \longrightarrow (P-2)$.　X を局所連結と仮定する。$\hat{e}$ の任意の相対コンパクト開近傍 V と，それを含むコンパクト集合 C をとる。補題14の $\{E_{\varepsilon, v}\}$ を $\mathcal{F} \equiv \{F_\alpha\}$ と思って，補題13を適用すると，適当な有限ケをとって，

$W \equiv C \cap (\bigcap_j^N E_{\varepsilon_j, v_j}) < V$ と出来る。W に含まれる $\hat{e}$ の連結成分 W_0 をとると，W のとり方と，X が局所連結の仮定から W_0 は又 $\hat{e}$ の近傍である。W_0 が H-不変である事を示せば，V の任意性より(P-2)が出た事になる。

さて，$^{\forall}h \in H$ で，$W_0 h \subset (\bigcap_j^N E_{\varepsilon_j, v_j})h = \bigcap_j^N E_{\varepsilon_j, v_j}$.
故に，$C \cap W_0 h < C \cap (\bigcap_j^N E_{\varepsilon_j, v_j}) \subset V$ で又 $V \subset C$ より，
$W_0 h \cap C = W_0 h \cap V$ は $W_0 h$ 中相対開集合である。従って，
$W_0 h = (W_0 h \cap C) + (W_0 h \cap C^c)$ は $W_0 h$ の二つの相対開集合への分割であるが，$W_0 h$ の連結性よりその一方は空集合で

なくてはならない．明らかに，$W_0 h \ni \hat{e}h = \hat{e} \in C$ で $W_0 h \cap C \neq \phi$ だから，$W_0 h = W_0 h \cap C \subset (\bigcap_j^N E_{\xi_j,\eta_j}) \cap C \subset W$. $W_0 h$ は W の $\hat{e}$ を含む連結成分として W_0 と一致する．┘

(P-1)+(A-3) ⟶ (P-2). $H\backslash G \sim (N\backslash H)\backslash(N\backslash G)$ であるから，初めから $N=\{e\}$ としてよい．

次に，H を生成するコンパクト集合 C に対し，$K = C \cup C^{-1}$ として，補題14を適用すればよい．┘

(P-1)+(A-1') ⟶ (P-3). (P-1)+(A-1) より (P-2) を示した証明で，C を相対コンパクト開集合とする代りに，(A-1') で仮定する H-不変な(対称)正有限測度の可測集合とする．此の時 $C^{-1}C$ は $\hat{e}$ を内点として含む H-不変有限測度集合であり，$C^{-1}C \cap (\bigcap_j^N E_{\xi_j,\eta_j})$ の特性函数の全体は，(P-3) で云う $\{f\}$ の族で，H を分離するものである．┘

<u>§5. 主定理の証明 (2).</u> 残るは (P-2)→(I.S-duality) の証明のみであるが，此れはほゞ [3] で述べた群の双対定理の議論と並行して行われる．此処ではその主要な steps を補題の形であげて行く事とする．

先ず $\mathfrak{R}$ の表現 $\mathfrak{U}$ が与えられたとして，補題12の後の注意により対応する $\mathfrak{H}^0$ から $\mathfrak{H}^\sigma$ への有界作用素 T^σ を考えると，此れは補題16により，(*)式を満す．(P-2) の仮定より，

<u>補題18.</u> H-不変な $L^2_\mu(X) \cap L^1_\mu(X)$ の元よりなる，

approximate identity がある. ┘

<u>証明</u> (P-2)で仮定された $x \in X$ は, そのH-不変コンパクト近傍系 $\{V\}$ に対して, $\tilde{e}$ の近傍系 $\{V^{-1}V\}$ を考える事により, $x = \tilde{e}$ であるとしてよい. その近傍系の元の特性函数を, 適当に normalize すれば, 求める approximate identity を得る. ┘

<u>補題 19.</u> $\forall f_1 \in \mathcal{G}_0^\sigma \cap L^\infty(X)$, $\forall f_3 \in \mathcal{G}_0^\sigma$ で,

$$(**) \qquad (\Pi^\sigma f_1)(\Pi^\sigma f_3) = \Pi^\sigma(f_1 \cdot f_3) \qquad \text{a.e.}$$ ┘

<u>証明</u> 補題18.で得た approximate identity を(*)式の f_2 に代入して極限をとればよい. ┘

<u>補題 20.</u> X上の有限測度のH-不変 Borel 集合Eに対して, ある Borel 集合 $\Pi^\sigma(E)$ が対応して,

$$\Pi^\sigma \chi_E = \chi_{\Pi^\sigma(E)} \quad .$$ ┘

<u>証明</u> (**)で, $f_1 = f_3 = \chi_E$ とおくと, $(\Pi^\sigma \chi_E)^2 = \Pi^\sigma \chi_E$ を得て, $\Pi^\sigma \chi_E$ は又, ある Borel 集合の特性函数である. ┘

<u>補題 21.</u> H-不変 Borel 集合Eで, $\infty > \mu(E) > 0$ なら $\mu(\Pi^\sigma(E)) > 0$ ┘

<u>証明</u> $\mu(\Pi^\sigma(E)) = 0$ とする. Eに入る任意のH-不変 Borel 集合Fについて, $\mu(\Pi^\sigma(F)) = 0$ は見易い. $E^{-1}E$ を考えると容易に $\mu(\Pi^\sigma(E^{-1}E)) = 0$ を得るから, $\tilde{e}$ のあるH-不変近傍 V に対して $\mu(\Pi^\sigma(V)) = 0$ を得た. (P-2)の仮定の近傍系との共通部分をとり, 補題18.同様に approximate identity $\{c_E \chi_E\}$ を作ると, $\Pi^\sigma(c_E \chi_E) = 0$ がえられた.

次に(*)式で、$f_1 = c_E\chi_E$, $f_2 \in C_0(X)$, $f_3 = \chi_{[f_2]}$ と代入して極限をとると、$\Pi^\sigma(f_2) = 0$ となるが、f_2の任意性から、$\Pi^\sigma = 0$ となり矛盾. ┘

<u>補題22.</u> $\forall k \in C_0^+(X)$ と $a>0$ に対して、

$E_a \equiv \{\hat{g} \mid k(\hat{g}) \geq a\}$, $F_a \equiv \{\hat{g} \mid \Pi^\sigma(k)(\hat{g}) \geq a\}$ とすると

$$F_a = \Pi^\sigma(E_a)$$ ┘

<u>証明.</u> Π^σ の線型性と補題20より step function に対して同様の命題は明らかである. $k \in C_0^+(X)$ に対しては、step function で一様に近似して結果を得る. ┘

<u>補題23.</u> Π^σ は isometry である. ┘

<u>証明.</u> 補題12 より $\|\Pi^{\sigma^{-1}}\| \leq 1$ を示せばよいが、それには、$\mu(E) \leq \mu(\Pi^\sigma(E))$ を示せばよい.

今 $\mu(E) > a > \mu(\Pi^\sigma(E))$ として、$\psi(g) \equiv a^{-\frac{1}{2}}\chi_E(g)$ を考えて、$\varphi(g) \equiv \langle T_g^\sigma \psi, \psi \rangle$ を計算する.

$\varphi(e) = a^{-1}\mu(E) > 1$ であるが、$\Pi^\sigma(\varphi)(g) \leq a^{-1}\mu(\Pi^\sigma(E)) < 1$ であって、補題21, 22 に矛盾する. ┘

<u>補題24.</u> 任意の正測度のH-不変相対コンパクトBorel集合Eに対して、ある $g_E \in G$ があって、$\Pi^\sigma(E) = E \cdot g_E$ a.e. ┘

<u>証明.</u> $\{g \in G \mid \langle T_g^\sigma \chi_E, \chi_E \rangle > \mu(E) - \varepsilon\}$ と

$\{g \in G \mid \langle T_g^\sigma \chi_{\Pi^\sigma(E)}, \chi_E \rangle > \mu(E) - \varepsilon\}$ とは互に Π^σ で移り合うから、$\varepsilon \to 0$ として、

(1) 発散する $\{g_e\}$ の列により，$\mu(\varPi^\sigma(E)\wedge E g_e)\to\mu(E)$。

(2) $\mu(\varPi^\sigma(E)\triangle E g_E)=0$ となる $g_E\in G$ がある．

の2つの場合が考えられるが，Eの相対コンパクト性から，(1)の場合はあり得ない。 ┘

補題25. ある $g\in G$ によって，$\varPi^\sigma = T_g^\sigma\,|\,\mathfrak{g}_0^\sigma$． ┘

証明. (P-2) で仮定された $\hat{e}$ の H-不変基本近傍(コンパクト)系を $\{W_\alpha\}$ とする．$W_\alpha\supset W_\beta$ で $\varPi^\sigma(W_\alpha)\supset\varPi^\sigma(W_\beta)$ だから，補題24 で $\varPi^\sigma(W_\alpha)=W_\alpha g_\alpha$ とすると，$W_\alpha g_\alpha\supset W_\beta g_\beta$ となり，$\widetilde{g_\alpha g_{\beta^{-1}}}\in W_\alpha^{-1}W_\beta$ を得て，$\{\hat{g}_\alpha\}$ は X 上の Cauchy 列を作る．X の完備性から，$\{\hat{g}_\alpha\}$ は極限 $\hat{g}_0$ を持つが，$\forall f\in\mathfrak{g}_0^\sigma$ に対し，$\{W_\alpha\}$ に対応する X 上の approximate identity $\{\varphi_\alpha\}$ を考えると

$$\varPi^\sigma(\langle T_g^\sigma\varphi_\alpha, f^*\rangle) = \langle T_{gg_\alpha}\varphi_\alpha, f^*\rangle$$

の左辺の極限は $\varPi^\sigma(f)$，右辺の極限は $T_{g_0}f$ となる． ┘

補題26. 補題25 の g_0 に対して，$\forall\varphi\equiv(\omega,v)\in\mathcal{R}$ で，

$$u(\varphi) = T_{g_0}^\omega v.$$ ┘

証明. 補題15 の対応 $B\omega$ について，補題16 と同様にして (*) に対応する式を作れば，$\forall\psi\in\mathfrak{g}_0^\omega$，$\forall f\in\mathfrak{g}_0^\sigma$ で

$$\langle T_g^\omega u(\varphi), \psi\rangle\varPi^\sigma(f)(\hat{g}) = \varPi^\sigma(\langle T_g^\omega v, \psi\rangle f)(\hat{g}).$$

$\varPi^\sigma = T_{g_0}^\sigma\,|\,\mathfrak{g}_0^\sigma$ を代入すれば，

$$\langle T_g^\omega u(\varphi), \psi\rangle f(\widehat{gg_0}) = \langle T_{gg_0}^\omega v, \psi\rangle f(\widehat{gg_0}).$$

となり，補題11. と，ψ, f の任意性より結論が得られる。⌋

§6. 今後の問題点.

(1) 主定理よりすれば，たとえば $H\backslash G$ が discrete であるとか，H がコンパクトか又は正規部分群の時は，直接(P-2)が示されるから，此れ等の場合には，無条件に I.S-duality が成立する。

更に，主定理は，付加条件 (A) の下で，"十分多くの H-不変ベクトルが存在する" 事を意味する (P-1) が I.S-duality の成立する為の必要十分條件である事を示す。たとえば，(A-2) は G が Lie 群の時には成立し，(A-3) は H が連結ならよい。

更に条件 (A) の下では，"$\underset{H\uparrow G}{\mathrm{Ind}}\, \mathbb{1}_H (=\sigma)$ の中に十分多くの H-不変ベクトルが存在する" 事を示す (P-3) が，他の條件と同値になるから，特定の表現 σ をチェックする事によつて，I.S-duality の成否が判る。I.S-duality の成立せぬ例として挙げた 例7 は，此の形で見ると容易に判定出来る。(補題 9).

此の様に，條件 (A) の下では割合はつきりするが，(A) を満さない場合の事情は判つて居ない。実際，totally disconnected な群で，I.S-duality は成立するが，(P-2) を満さぬ例を作る事が出来る。

此の点，I.S-duality の成立する為の，簡単な必要十分條件を求める事が，今後の課題の1つと云える。

(2) 次に，上に触れた条件(P-3)は，(P-2)を少し緩めた形であるが，Xの位相と直接関係のない形で，しかも特定の表現 $\sigma \equiv \operatorname{Ind}_{H\uparrow G} \mathbb{1}_H$ について述べられて居るので扱い易い。條件(A)の下では，他の条件と同値になるが，一般の場合(P-3)とI.S-dualityとの関係はまだ判って居ない。此の辺りの関連性を解明する事も興味がある。

(3) 本文で述べた如く，群の双対性と異りI.S-dualityが成立するのは，特別な(G,H)のpairに限られる訳であるが，此の事がどの様な意味を持つのか？と云った事も残された課題である。Gに対し，(G,H)がI.S-dualityを満す様な閉部分群Hの全体については，[5]で述べた所のベクトルによるdualのsubalgebrasとの間のPontrjaginの双対性を考える事が出来るが，たとえば，例7であげた様な重要な閉部分群で既に此の枠からはみ出るものがある。(補題9.参照)

其処で，何らかの形で，I.S-dualityのformulationを拡大して，此の様な落ちこぼれなく，Pontrjaginの双対性に対応する命題が得られないであろうか.

文　　献

[1] N. Bourbaki ; Integration chap. VII Hermann (1963).

[2] N. Iwahori & M. Sugiura ; A duality theorem for homogeneous manifolds of compact Lie groups, Osaka J. Math., 3 (1966), pp 139-153.

[3] N. Tatsuuma ; A duality theorem for locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ. 6 (1967), pp 187-293.

[4] A. Weil ; L'integration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann (1940).

[5] 辰馬伸彦 ; 正規部分群に対する双対性, 数理解析研究所講究録 262 (1976) pp 72-91.